Contrôle Continu (26/10/21)

Durée : 2h
Documents, téléphones portables et appareils électroniques interdits
La redaction et la clarté de l'argumentation sera prise en compte dans la notation

---

Exercice 1 (Autour du cours)
Soient K un corps et $n \geq 2$ un entier. On suppose que K est de caractéristique différente de 2. On désigne par $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique de $\{1, 2, \dots, n\}$.
Un polynôme $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ est *antisymétrique* si pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\sigma P = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} P$, où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ.

1) Vérifier que le polynôme de Vandermonde $V(X_1, \dots, X_n) = \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)$ est antisymétrique.

2) Montrer que tout polynôme antisymétrique P s'écrit sous la forme $P = V \cdot Q$, où $Q \in K[X_1, \dots, X_n]^{\mathcal{S}_n}$ est un polynôme symétrique.

3) Notons $K[X_1, \dots, X_n]^{\mathcal{A}_n}$ la sous-algèbre de $K[X_1, \dots, X_n]$, invariante sous l'action du groupe alterné $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{S}_n$.

a) Montrer que $P \in K[X_1, \dots, X_n]^{\mathcal{A}_n}$ s'écrit de manière unique sous la forme $P = A + B \cdot V$ où $A, B \in K[X_1, \dots, X_n]^{\mathcal{S}_n}$ sont des polynômes symétriques.
Indication : montrer que l'orbite de P sous $\mathcal{S}_n$ ne prend qu'au plus deux valeurs P et $Q = \tau P$, où $\tau = (1\ 2)$ est une transposition, puis écrire $P = \frac{1}{2}(P + Q) + \frac{1}{2}(P - Q)$.

b) Soit $\varphi : K[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n][T] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_n]^{\mathcal{A}_n}$ le morphisme qui envoie Σ_i (vue comme indéterminée) sur le polynôme symétrique $\Sigma_i(X_1, \dots, X_n)$, et T sur V. Montrer que φ est bien défini et surjectif.

c) Montrer que φ induit un isomorphisme de $K[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n][T]/(T^2 - V^2)$ sur $K[X_1, \dots, X_n]^{\mathcal{A}_n}$.

Exercice 2 (Sommes permutées)
Soient K un corps infini, $n \geq 2$ un entier, et $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ des éléments deux à deux distincts. Montrer qu'il existe un n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$ tel que les $n!$ sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_{\sigma(i)}$, avec σ parcourant $\mathcal{S}_n$, sont deux à eux distinctes. Si $\tau \in \mathcal{S}_n$, on pourra considérer le polynôme

$$\prod_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma \neq \tau}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i)} - a_{\tau(i)}) X_i \right) \in K[X_1, X_2, \dots, X_n].$$

Exercice 3 (Série génératrice de Fibonacci)
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de réels définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
Soit $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n X^n \in \mathbb{Q}[[X]]$.

1) Montrer que $S = \dfrac{X}{1 - X - X^2}$.

2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 4 (Un théorème de Kronecker)

Soit $P_1 \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire dont les racines $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité) vérifient $0 < |z_i| \leq 1$. On se propose de montrer que les z_i sont des racines de l'unité.

1) Soit Ω_n l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{Z}[X]$ de degré n dont les racines dans $\mathbb{C}$ sont de module inférieur ou égal à 1.

a) Montrez que si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \Omega_n$, alors pour tout $0 \leq k \leq n$, $|a_k| \leq \displaystyle\binom{n}{k}$.

b) En déduire que Ω_n est fini.

2) Soit $k \geq 1$. On définit $P_k = (X - z_1^k)(X - z_2^k) \cdots (X - z_n^k)$.

a) Montrer que $P_k \in \mathbb{Z}[X]$.

b) En déduire que $P_k \in \Omega_n$.

3) Soit $Z_n = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists P \in \Omega_n \text{ tel que } P(z) = 0\}$.

a) Montrer que Z_n est fini.

b) En déduire que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, il existe $r, s \in \mathbb{N}$ distincts tels que $z_k^r = z_k^s$.

4) Conclure.